

Rappel : Lien entre matrice et application linéaire

• Toute application linéaire $f : E \rightarrow F$ admet une matrice dans n'importe quelles bases $\mathcal{B}$ de E et $\mathcal{G}$ de F . (On la note $M_{\mathcal{B},\mathcal{G}}(f)$.)

Dans le cas d'un endomorphisme, on utilise généralement la même base au départ et à l'arrivée. Dans la base $\mathcal{B}$, on note alors $M_{\mathcal{B}}(f)$. La matrice est alors carrée.

• À partir de toute matrice $M \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, en choisissant E et F des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions respectives m et n ainsi que des bases respectives $\mathcal{B}, \mathcal{G}$ de E et G , on peut construire une unique application linéaire $f : E \rightarrow F$ de matrice M dans les bases en question en définissant :

$$M_{\mathcal{G},\mathcal{B}}(f) = M = \mathcal{G} \overbrace{\begin{pmatrix} f(b_1) & \dots & f(b_m) \end{pmatrix}}^{f(\mathcal{B})} = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{1,1} & \dots & m_{1,m} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ m_{n,1} & \dots & m_{n,m} \end{pmatrix}$$

En particulier, si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice carrée, elle peut être considérée comme la matrice d'un endomorphisme de E de dimension n .

I Valeur propre et vecteur propre

Dans tout ce chapitre, on considèrera E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de dimension n , $\mathcal{B}$ une base de E et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E .



Notation :

Si $\mathcal{B}$ est une base de E , pour simplifier les notations, on notera souvent $M_{\mathcal{B}}$ au lieu de $M_{\mathcal{B}}(f)$.

I-1 Valeur propre d'un endomorphisme



Commentaires :

Les matrices les plus pratiques à utiliser, tant dans le calcul du rang que le calcul des puissances sont les matrices triangulaires, voir même mieux, les matrices diagonales. Le but de ce chapitre est déterminer, si possible, une base dans laquelle la matrice de l'endomorphisme sera diagonale (ou du moins "la plus diagonale possible")



Remarque :

On cherche à "annuler" une bonne partie des coefficients non diagonaux. Or, si on note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, on obtient l'équivalence suivante :

$$M_{\mathcal{B}}(f) = e_i \begin{pmatrix} f(e_i) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \dots \iff f(e_i) = \lambda e_i$$

Le but est donc de trouver un maximum de vecteurs non nuls linéairement indépendants tels que $f(v)$ et v soient colinéaires (i.e. il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(v) = \lambda v$.)



Définition

On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une **valeur propre** (*vap*) de l'endomorphisme f s'il existe $v \neq 0$ tel que $f(v) = \lambda v$. L'ensemble des valeurs propres d'un endomorphisme f est appelé **spectre** de f et noté $Sp(f)$.

■ Exemples :

Supposons $n = 2$ et $\{e_1, e_2\}$ une base de E ;

1 ■ Si $M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, alors 2 est valeur propre car

$$f(e_1) = 2 e_1$$

2 ■ Si $M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, alors 0 est valeur propre car

$$f(e_2 - e_1) = \vec{0} = \mathbf{0} \times \underbrace{(e_2 - e_1)}_{\neq 0}$$

I-2

Vecteurs propres et espaces propres d'un endomorphisme



Définition

Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est une **valeur propre** de l'endomorphisme f , on appelle v un **vecteur propre** (*vep*) de la valeur propre λ tout vecteur v **non nul** tel que $f(v) = \lambda v$. L'ensemble $E_{\lambda}(f) = \{v \in E \mid f(v) = \lambda v\}$ s'appelle **l'espace propre** associé à la valeur propre λ .

■ Exemples :

Supposons $n = 2$ et $=\{e_1, e_2\}$ une base de E ;

3 ■ Si $M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, alors $e_1 \neq 0$ est vecteur propre de valeur propre 2 car $f(e_1) = 2e_1$

4 ■ Si $M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, alors $v = e_2 - e_1 \neq 0$ et vecteur propre de valeur propre 0 car $f(v) = \vec{0} = 0 \times v$

Remarques :

- 1) λ est une valeur propre de f si et seulement si $E_{\lambda}(f) \neq \{0_E\}$.
(c'est la définition d'une valeur propre.)
- 2) $0_E \in E_{\lambda}(f)$. Les vecteurs propres de $vap \lambda$ sont les éléments non nuls de $E_{\lambda}(f)$.
- 3) $E_{\lambda} = \ker(f - \lambda Id)$, ce qui entraîne immédiatement que E_{λ} est un $\mathbb{K}$ -e.v. et qu'un **vecteur propre n'est pas unique!** (Par exemple, si v est un vecteur propre de λ , tout αv , avec $\alpha \in \mathbb{K}$ est un vecteur propre de λ .)
- 4) Si v doit être non nul, il se peut par contre que $\lambda = 0$. Dans ce cas, on a $E_0(f) = \ker f$.
- 5) Les valeurs propres et les vecteurs propres ne dépendent pas d'une base.

Notation : S'il n'y a pas de confusion possible, on notera E_{λ} au lieu de $E_{\lambda}(f)$.

I-3 ■ Stratégies de calcul des valeurs propres d'un endomorphisme

Tout repose sur les équivalences suivantes :

Propriété fondamentale

$$\begin{aligned} \lambda \text{ est une valeur propre} &\iff E_{\lambda} \neq \{0_E\} \\ &\iff \ker(f - \lambda Id) \neq \{0_E\} \\ &\iff f - \lambda Id \text{ est non injective} \\ &\iff f - \lambda Id \text{ est non surjective} \\ &\iff \operatorname{rg}(f - \lambda Id) < n = \dim E \end{aligned}$$

Application : Cette propriété permet de déterminer plusieurs méthodes pour trouver l'ensemble des valeurs propres de f .

Méthode 1 : On détermine l'ensemble des valeurs λ telles que $\operatorname{rg}(f - \lambda Id) < n$.

Ceci se fait généralement à l'aide d'une matrice de f dans une base.

■ Exemple 5 :

Supposons que E soit de dimension 3. Soit f un endomorphisme de E de matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix} \text{ dans une base } \mathcal{B}. \text{ Alors, } \operatorname{rg}(f - \lambda Id) = \operatorname{rg}(M - \lambda I_3). \text{ Or,}$$

$$M - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 4-\lambda & -2 \\ 3 & 6 & -5-\lambda \end{pmatrix}$$

Première stratégie possible :

"Sans se poser de questions" : faire un **pivot de Gauss** pour arriver à une matrice triangulaire. Il faut néanmoins choisir stratégiquement ses pivots, mais attention, toujours **non nuls**!

$$\begin{aligned} M - \lambda I_3 &= \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & \boxed{1} \\ 2 & 4-\lambda & -2 \\ 3 & 6 & -5-\lambda \end{pmatrix} \\ &\text{on annule les coeff : } L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1; \quad L_3 \leftarrow L_3 + (5+\lambda)L_1 \\ &\sim \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 4-2\lambda & 8-\lambda & 0 \\ -\lambda^2-4\lambda+8 & 16+2\lambda & 0 \end{pmatrix} \\ &\text{Le nouveau pivot devrait être en } C^2; L_2, \text{ mais l'expression peut s'annuler.} \end{aligned}$$

À ce stade là, on a donc deux possibilités :

★ continuité de la méthode : "je ne me pose pas de questions" :

On prend comme pivot la quantité $8 - \lambda$ (coefficient du milieu). Néanmoins, il faut s'assurer qu'il est non nul. Il faut donc séparer les cas :

Si $\lambda = 8$:

$$M - \lambda I_3 \sim \begin{pmatrix} -7 & 2 & 1 \\ -12 & 0 & 0 \\ -88 & 32 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -7 & 2 & 1 \\ -88 & 32 & 0 \\ -12 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c'est une matrice de rang 3. $\lambda = 8$ n'est donc pas valeur propre.

Si $\lambda \neq 8$: on choisit comme pivot $8 - \lambda$:

$$M - \lambda I_3 \sim \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 4-2\lambda & \boxed{8-\lambda} & 0 \\ -\lambda^2-4\lambda+8 & 16+2\lambda & 0 \end{pmatrix}$$

opération : $L_3 \leftarrow (8-\lambda)L_3 - (16+2\lambda)L_2$

$$\sim \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 4-2\lambda & \boxed{8-\lambda} & 0 \\ A & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où $A = (8-\lambda)(-\lambda^2-4\lambda+8) - (16+2\lambda)(4-2\lambda)$

$$= \lambda^3 + \lambda^2 \underbrace{(-8+4+4)}_{=0} + \lambda \underbrace{(-4 \times 8 - 8 + 2 \times 16 + 2 \times 4)}_{=-16} + \underbrace{8^2 - 4 \times 16}_{=0}$$

$$= \lambda^3 - 16\lambda = \lambda(\lambda^2 - 16) = \boxed{\lambda(\lambda-4)(\lambda+4)}$$

Ainsi

$$\boxed{Sp(f) = \{0, -4, 4\}}.$$

★ ou bien "je me débarrasse du problème de pivot nul" :

à partir de $\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 4-2\lambda & 8-\lambda & 0 \\ -\lambda^2-4\lambda+8 & 16+2\lambda & 0 \end{pmatrix}$, on retire les λ du coefficient diagonal : $L_2 \leftarrow 2L_2 + L_3$

$$M - \lambda I_3 \sim \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 2(4-2\lambda) - \lambda^2 - 4\lambda + 8 & 32 & 0 \\ -\lambda^2 - 4\lambda + 8 & 16 + 2\lambda & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ -\lambda^2 - 8\lambda + 16 & 32 & 0 \\ -\lambda^2 - 4\lambda + 8 & 16 + 2\lambda & 0 \end{pmatrix}$$

On simplifie la deuxième colonne par 2

$$\sim \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ -\lambda^2 - 8\lambda + 16 & 16 & 0 \\ -\lambda^2 - 4\lambda + 8 & 8 + \lambda & 0 \end{pmatrix} \quad \text{puis } L_3 : 16L_3 - (8+\lambda)L_2$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ -\lambda^2 - 8\lambda + 16 & 16 & 0 \\ A & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où $A = 16(-\lambda^2 - 4\lambda + 8) - (8+\lambda)(-\lambda^2 - 8\lambda + 16)$

$$= 16(-\lambda^2 - 4\lambda + 8) - (-\lambda^3 + \lambda^2 \underbrace{(-8-8)}_{-16} + \lambda \underbrace{(-8.8+16)}_{-64+16=-48} + 8.16)$$

$$= \lambda^3 + \lambda^2(-16+16) + \lambda \underbrace{(-4.16+48)}_{-16} = \lambda^3 - 16\lambda = \lambda(\lambda^2 - 16) = \boxed{\lambda(\lambda-4)(\lambda+4)}$$

Ainsi

$$\boxed{Sp(f) = \{0, -4, 4\}}.$$

Avantage : avec ces méthodes, on obtient toujours une équation à résoudre.

Inconvénient : il n'est pas toujours simple de la résoudre ...

Deuxième stratégie possible :

Tenter de mettre en valeur par de simples **combinaisons de lignes ou de colonnes** une colonne ou une ligne entière ayant des coefficients proportionnels.

$$M - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 4-\lambda & -2 \\ 3 & 6 & -5-\lambda \end{pmatrix} \sim \boxed{C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3} \begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 & 1 \\ 4-\lambda & 4-\lambda & -2 \\ 4-\lambda & 6 & -5-\lambda \end{pmatrix}$$

on annule les coefficients de la première colonne :

$$L_2 \rightarrow L_2 - L_1 \quad L_3 \rightarrow L_3 - L_1$$

$$\sim \begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & -3 \\ 0 & \boxed{4} & -6-\lambda \end{pmatrix}$$

pas de simplification évidente, alors on revient au pivot de Gauss

on place sur la diagonale un élément non nul de manière certaine, on échange

$$M - \lambda I_3 \sim \begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{4} & -6-\lambda \\ 0 & 2-\lambda & -3 \end{pmatrix}$$

et c'est parti pour le pivot ! $L_3 \rightarrow 4L_3 - (2-\lambda)L_2$

$$M - \lambda I_3 \sim \begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -6-\lambda \\ 0 & 0 & \underbrace{-3 \times 4 - (2-\lambda)(-6-\lambda)}_{-\lambda^2-4\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -6-\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda(\lambda+4) \end{pmatrix}$$

On trouve de même que

$$\boxed{Sp(f) = \{0, -4, 4\}}$$

Avantage : Au final le polynôme dont il faut trouver les racines n'est ici "que" de degré 2 au lieu d'être de degré 3 dans l'autre méthode...

Inconvénient : Il n'est pas toujours évident de trouver des combinaisons simples à effectuer, mais il peut valoir la peine de prendre quelques minutes pour y réfléchir. Surtout si la matrice est de grande taille.

Méthode 2 : par résolution de système : "recherche" de $\ker(f - \lambda Id)$:

On se place dans une base $\mathcal{B}$, dans laquelle on dispose de la matrice M de f . On pose $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$. On cherche les λ pour lesquels $\vec{0}$ n'est pas la seule solution du système.

Par exemple, toujours pour $M = M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix}$. Alors

$$(f - \lambda Id)(v) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (1 - \lambda)x + 2y + \boxed{z} = 0 \\ 2x + (4 - \lambda)y - 2z = 0 \\ 3x + 6y - (5 + \lambda)z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1 - \lambda)x + 2y + z = 0 \\ (4 - 2\lambda)x + (8 - \lambda)y = 0 \\ (3 + (5 + \lambda)(1 - \lambda))x + (6 + 2(5 + \lambda))y = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + (5 + \lambda)L_1 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1 - \lambda)x + 2y + z = 0 \\ (4 - 2\lambda)x + (8 - \lambda)y = 0 \\ (8 - 4\lambda - \lambda^2)x + (16 + 2\lambda)y = 0 \end{cases}$$

Recherche d'un pivot non nul : $L_2 \leftarrow 2L_2 + L_3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1 - \lambda)x + 2y + z = 0 \\ (-\lambda^2 - 8\lambda + 16)x + \boxed{32}y = 0 \\ (8 - 4\lambda - \lambda^2)x + (16 + 2\lambda)y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1 - \lambda)x + 2y + z = 0 \\ (-\lambda^2 - 8\lambda + 16)x + 32y = 0 \\ Ax = 0 \end{cases} \quad L_3 \leftarrow 16L_3 - (8 + \lambda)L_2$$

où $A = 16(-\lambda^2 - 4\lambda + 8) - (8 + \lambda)(-\lambda^2 - 8\lambda + 16) = \lambda(\lambda - 4)(\lambda + 4)$

Le système admet une unique solution si et seulement si $A = \lambda(\lambda - 4)(\lambda + 4) \neq 0$. On a donc

$$\lambda \text{ vap} \Leftrightarrow \lambda \in \ker(f - \lambda Id) \Leftrightarrow \boxed{\lambda \in \{0, -4, 4\}}$$

Avantage : Méthode efficace à tous les coups. (Méthode très similaire au pivot de Gauss dans la matrice $M - \lambda Id$.) Permet de calculer ensuite rapidement les espaces propres...

Inconvénient : Pas très esthétique et un peu rébarbatif. De plus, comme dans la méthode du pivot de Gauss, l'équation à résoudre n'est pas toujours très simple.

I-4 Stratégies de calcul des espaces propres d'un endomorphisme

P our trouver les espaces propres de l'endomorphisme f :

On résoud $(f - \lambda)(v) = 0$, où $\lambda \in Sp(f)$

Ici encore, plusieurs stratégies possibles *qui dépendent principalement de la méthode utilisée pour trouver les vap.* :

- Si on a déterminé les valeurs propres à l'aide du rang de la matrice :

on peut

- Résoudre $MX = \lambda X$ pour chaque valeur propre (où $M = M(f)$.) (long !)
- Pour ne pas avoir à refaire intégralement l'ensemble des calculs pour chaque valeur propre :
on note S la matrice la plus simple obtenue à partir des simplifications **par lignes uniquement** à partir de la matrice $M(f) - \lambda Id$. On pourra alors résoudre plutôt $SX = 0$ au lieu de $(M(f) - \lambda Id)X = 0$.

- Si on a utilisé la deuxième méthode pour déterminer les valeurs propres :

Il suffit de résoudre le système restant pour les valeurs propres trouvées.

■ Exemple 6 :

Les espaces propres de l'endomorphisme dans l'exemple précédent sont :

$$E_{-4} = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad E_0 = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad E_4 = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Voyons ceci par deux des stratégies proposées.

Avec la stratégie 1 : en utilisant la matrice $M - \lambda Id$ simplifiée :

La matrice la plus simple que nous avons obtenue par manipulation de lignes à partir de $M - \lambda Id$ (matrice appelée *réduite de Gauss*) est

$$M - \lambda I = S = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 2 & 1 \\ -\lambda^2 - 8\lambda + 16 & 32 & 0 \\ -\lambda^2 - 4\lambda + 8 & 16 + 2\lambda & 0 \end{pmatrix}$$

Le système à résoudre est donc

$$S = \begin{cases} (1 - \lambda)x + 2y + z = 0 \\ (-\lambda^2 - 8\lambda + 16)x + 32y = 0 \\ (-\lambda^2 - 4\lambda + 8)x + (16 + 2\lambda)y = 0 \end{cases}$$

pour chacun des $\lambda \in Sp(f) = \{0, -4, 4\}$.

- ★ Si $\lambda = 0$:

$$S = \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 16x + 32y = 0 \\ 8x + 16y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

$$\text{D'où } E_0 = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

★ Si $\lambda = 4$:

$$\mathcal{S} = \begin{cases} -3x + 2y + z = 0 \\ -32x + 32y = 0 \\ -24x + 24y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -3x + 2y + z = 0 \\ x = y \end{cases} \iff \begin{cases} x = z \\ x = y \end{cases}$$

D'où $E_4 = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

★ De même si $\lambda = -4 \dots$

Stratégie 2 : en utilisant le système d'équations grâce auquel on a obtenu $Sp(f)$:

Rappelons que si $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_B$, on a

$$(f - \lambda Id)(v) = 0 \iff \begin{cases} (1 - \lambda)x + 2y + z = 0 \\ (-\lambda^2 - 8\lambda + 16)x + 32y = 0 \\ \lambda(\lambda - 4)(\lambda + 4)x = 0 \end{cases}$$

Ainsi, si $\lambda \in Sp(f) = \{0; -4; 4\}$, la dernière ligne s'annule et le système se résoud simplement.

★ Si $\lambda = 4$: $(f - \lambda Id)(v) = 0 \iff \begin{cases} -3x + 2y + z = 0 \\ -32x + 32y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -x + z = 0 \\ x = y \end{cases}$

D'où $E_4 = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

★ Si $\lambda = -4$: $(f - \lambda Id)(v) = 0 \iff \begin{cases} 5x + 2y + z = 0 \\ 32x + 32y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x + z = 0 \\ x = -y \end{cases}$

D'où $E_{-4} = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$

Si seules les dimensions de l'espace propre nous intéressent :

Il se peut que l'énoncé ne nécessite pas le calcul exact de l'espace propre associé à la *vap* λ , mais seulement la connaissance de la dimension de E_λ . Dans ce cas, notons que

$$\dim E_\lambda = \dim \ker(f - \lambda Id) = n - \text{rg}(f - \lambda Id)$$

Si on a utilisé la méthode 1 pour trouver les valeurs propres, ce rang est obtenu directement sur la matrice réduite de $M - \lambda Id$.

■ Exemple 7 :

Avec $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix}$, on a trouvé une réduite : $\begin{pmatrix} 4 - \lambda & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -6 - \lambda \\ 0 & 0 & -\lambda(\lambda + 4) \end{pmatrix}$.

Pour la valeur propre 4, on a donc

$$\text{rg}(M - 4Id) = \text{rg} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -10 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

D'où

$$\dim E_4 = 3 - 2 = 1$$

Remarque : Dans le cas de cette matrice, on aurait pu trouver les dimensions associées d'une manière encore plus rapide. C'est ce que nous verrons entre autres par la suite.

I-5 Valeurs propres d'une matrice



Définition

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée. On appelle λ une *valeur propre* de M s'il existe un vecteur $X \in \mathbb{K}^n$ **non nul** tel que $MX = \lambda X$. On note $Sp(M)$ et on appelle *spectre de M* l'ensemble des valeurs propres de M .



Définition

Si λ est une valeur propre de M , alors on note $E_\lambda(M) = \{X \in \mathbb{K}^n \mid MX = \lambda X\}$ et on appelle *vecteur propre* de valeur propre λ de M n'importe quel élément **non nul** de $E_\lambda(M)$. On appelle $E_\lambda(M)$ l'*espace propre* de la valeur propre λ .

Propriété

Si $f : E \rightarrow E$ est un endomorphisme associé à M tel que $M = M_B(f)$, alors

- X est un vecteur propre de M de *vap* λ si et seulement si le vecteur v de coordonnées X dans la base $\mathcal{B}$ est un vecteur propre de f , de *vap* λ .
- λ est une valeur propre de M si et seulement si c'est une valeur propre de f .

■ Exemple 8 :

L'ensemble des valeurs propres d'une matrice triangulaire est l'ensemble de tous les coefficients diagonaux.

Quitte à ce que les coefficients * ci-dessous soient nuls ou à transposer la matrice, on ne perd rien à supposer qu'elle est triangulaire supérieure. On pose

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

λ est une valeur propre de M si et seulement si $\text{rg}(M - \lambda Id) < n$. Or $D - \lambda Id = \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda & * & \dots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n - \lambda \end{pmatrix}$ qui est de rang $< n$ si et seulement si l'un des coefficients diagonaux s'annule, autrement dit, si et seulement si $\lambda \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, d'où $Sp(T) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$

Corollaire

Deux matrices semblables ont les mêmes valeurs propres.

Moralité de la propriété : parler de valeur propre ("et vecteur propre") d'une matrice ou de l'endomorphisme associé est exactement la même chose. Les mêmes propriétés s'appliquent.

Corollaire

Si M est semblable à une matrice triangulaire ou diagonale T , alors $Sp(M)$ est constitué de **tous les** les coefficients diagonaux de M .



Remarque :

Si deux matrices semblables ont exactement les mêmes valeurs propres, les coordonnées des vecteurs propres ne sont pas forcément les mêmes. Néanmoins, ce sont les coordonnées du même vecteur propre $v \in E$ de l'endomorphisme associé.

Corollaire

Soient $M, M' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices semblables, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $X \in \mathbb{K}^n$. Alors,

$$MX = \lambda X \quad \Leftrightarrow \quad M'X' = \lambda X'$$

où $X' = P^{-1}X$, si $M' = P^{-1}MP$. (ce qui correspond au changement de base.)

■ Exemple 9 :

Supposons que $\mathcal{B}$ soit la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et le changement de base

$$M_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}. \quad (M_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix})$$

Alors, si $M = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ on a $M' = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$

Alors, si $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, on a bien $M.M_{\mathcal{B}}(e_1) = 3M_{\mathcal{B}}(e_1)$.

or, $M' \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \neq 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

mais, $M_{\mathcal{B}'}(e_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et on constate que

$$M'M_{\mathcal{B}'}(e_1) = M_{\mathcal{B}'} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 3M_{\mathcal{B}'}(e_1)$$

II Diagonalisation

II-1 Définitions

■ Définition

Soit f un endomorphisme (resp. $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée). On dit que f (resp. M) est **diagonalisable** si elle admet (resp. si elle est semblable à) une matrice diagonale.

Corollaire

Supposons que M soit la matrice associée à $f \in \mathcal{L}(E)$ dans une base $\mathcal{B}$. M est diagonalisable si et seulement s'il existe une base $\mathcal{B}'$ telle que $M_{\mathcal{B}'}(f)$ soit diagonale.

(Autrement dit, s'il existe D diagonale telle que M et D soient deux matrices d'un même endomorphisme.)



Remarque :

De cette propriété, on déduit le langage (un peu abusif) pour une matrice M d'être "diagonalisable dans une base $\mathcal{B}'$ ".

II-2 Nombre de valeurs propres / dimension des espaces propres

Théorème

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ des valeurs propres **deux à deux distinctes** d'un endomorphisme f , et $v_1, \dots, v_d$ des vecteurs propres (non nuls) de valeurs propres respectives $\lambda_1, \dots, \lambda_d$, alors la famille $\{v_1, \dots, v_d\}$ est libre.

Corollaire

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, (resp. $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) où E est un espace vectoriel de dimension n .

- f (resp. M) admet au maximum n valeurs propres distinctes.
- Si f (resp. M) admet n valeurs propres distinctes, alors f (resp. M) est diagonalisable.



Remarque :

Si le nombre de valeurs propres distinctes est différent de $n = \text{card } E$, on ne peut rien dire a priori, mais rien n'est désespéré...!

■ Exemple 10 :

Matrice diagonalisable : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (car déjà diagonale)

■ Exemple 11 :

Matrice non diagonalisable : $M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$:

On a trivialement $\text{Sp}(M) = \{a\}$. Ainsi, si M était diagonalisable, on aurait M est semblable à $a \text{Id}$, d'où l'existence de P inversible telle que

$$M = P a \text{Id} P^{-1} = a P P^{-1} = a \text{Id}$$

Or $M \neq a \text{Id}$, d'où la contradiction.

Théorème de juxtaposition des bases 1 :

Supposons donné :

- $\lambda_1, \dots, \lambda_d \in \mathbb{K}$ des valeurs propres 2 à 2 **distinctes** de f (resp. M)
- $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_d$ des familles libres respectivement dans $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_d}$

Alors $\mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_d$ est libre.

On en déduit le théorème suivant :

Théorème de juxtaposition des bases 2 :

Supposons donné :

- $\lambda_1, \dots, \lambda_d \in \mathbb{K}$ des valeurs propres 2 à 2 **distinctes** de f (resp. M)
- $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_d$ des familles libres respectivement dans $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_d}$
- $\text{card}(\mathcal{B}_1) + \dots + \text{card}(\mathcal{B}_d) \geq n$

Alors

- $\text{card}(\mathcal{B}_1) + \dots + \text{card}(\mathcal{B}_d) = n$
- $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_d$ est une base de E
- f (resp. M) est diagonalisable dans la base $\mathcal{B}$.

De plus,

- $\mathcal{B}_i$ est finalement une base de E_{λ_i} (i.e. $\text{card}(\mathcal{B}_i) = \dim E_{\lambda_i}$)
- il n'existe pas d'autre valeur propre de f (resp. M .)

? Exercice 1

Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

et dans les deux sens finalement, si on est certain d'avoir tout le spectre :

Théorème

On se donne un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ (resp. une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) On note $n = \dim E$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_d \in \mathbb{K}$ l'ensemble des valeurs propres **distinctes** de f (resp. M). Alors

$$\begin{aligned} f \text{ (resp. } M) \text{ est diagonalisable} &\iff \dim E_{\lambda_1} + \dots + \dim E_{\lambda_d} \geq n \\ &\iff \dim E_{\lambda_1} + \dots + \dim E_{\lambda_d} = n \end{aligned}$$

II-3 Diagonalisabilité sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$?

? Exercice 2

Montrer que si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admet une valeur propre complexe non réelle, alors elle ne peut pas être semblable à une matrice diagonale réelle.

Définition

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que M est *diagonalisable sur $\mathbb{R}$* (resp. $\mathbb{C}$) si M est diagonalisable et que toutes ses valeurs propres sont dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$).

■ Exemple 12

La matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, mais pas sur $\mathbb{R}$.

$$M - \lambda Id = \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ 2 & -1-\lambda & 0 \\ -1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} L_1 \leftarrow \tilde{L}_1 + L_3 \\ C_3 \leftarrow \tilde{C}_3 - C_1 \\ C_2 \leftarrow \tilde{C}_3 \\ L_2 \leftarrow \tilde{L}_2 + (1+\lambda)L_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ 1-\lambda & 0 & 1-\lambda \\ 2 & -1-\lambda & 0 \\ -1 & 1 & -\lambda \\ 1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1-\lambda \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ 1-\lambda & 0 & 0 \\ \star & -1-\lambda^2 & 0 \\ \star & \star & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Les valeurs propres sont}$$

donc les valeurs qui annulent $1 - \lambda$ et $-1 - \lambda^2$, autrement dit

$$Sp(M) = \{1, i, -i\}$$

Il y a trois valeurs propres distinctes et l'ordre de M est trois. Ainsi, M est diagonalisable dans $\mathbb{C}$, mais pas sur $\mathbb{R}$!

Propriété

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. λ est valeur propre de M (de vecteur propre X), ssi $\bar{\lambda}$ est valeur propre (de vecteur propre $\bar{X}$).



Remarque :

Cette propriété permet entre autres, si on a deux valeurs propres $\lambda, \bar{\lambda}$, de ne calculer qu'un seul espace propre. L'autre s'en déduit simplement par conjugaison.

II-4 Formule de changement de base

On note $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose ici M diagonalisable. On note

$$P = \begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_n \\ \star & & \star \\ \vdots & & \vdots \\ \star & & \star \end{pmatrix} \quad \text{une matrice de vecteurs propres de } M$$

et

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{la matrice de valeurs propres de } M \text{ associée}$$

où λ_i est la valeur propre associée à v_i . Notons qu'ici, on ne suppose pas forcément que les λ_i sont deux à deux distincts.

Alors on a

$$M = PDP^{-1}$$

C'est en effet la formule de changement de base classique issue de

$$\underbrace{M_{\mathcal{B}}}_M = \underbrace{M_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})}_P \underbrace{M_{\mathcal{B}'}(D)}_D \underbrace{M_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')}_{P^{-1}}$$

où $\mathcal{B}$ est la base en cours et $\mathcal{B}'$ la base de vecteurs propres.

III Applications : puissances $n^{\text{èmes}}$

Si M est diagonalisable, avec les notations de la partie précédente, on a $M = PDP^{-1}$. Ainsi, si l'on souhaite calculer la puissance $n^{\text{ème}}$ de M , on a

$$M^n = \overbrace{(PDP^{-1})(PDP^{-1}) \dots (PDP^{-1})}^{n \text{ fois}} = PD^n P^{-1}$$

Or, D^n est facile à calculer, puisque

$$D^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n^n \end{pmatrix}$$

C'est cette stratégie que nous allons tenter d'utiliser dans la suite.

III-1 Suites récurrentes linéaires

On souhaite déterminer de manière exacte l'expression de u_n sachant que

$$u_{n+d} = a_0 u_n + a_1 u_{n+1} + \dots + a_{d-1} u_{n+d-1}$$

■ Exemple 13 :

$$u_{n+3} = -u_{n+2} - u_{n+1} - u_n.$$

- Mise en forme du problème sous forme de matrice :

On pose $U_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$, alors

$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+3} \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_{n+2} - u_{n+1} - u_n \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$$

i.e. $U_{n+1} = AU_n$, où $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On en déduit que

$$U_n = A^n U_0$$

Il est donc "très utile" de pouvoir calculer A^n , ou au moins la dernière ligne de A^n , grâce à laquelle on trouvera u_n en fonction de u_2, u_1, u_0 , puisque

$$\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = U_n = A^n \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}.$$

- Diagonalisation de A ?

Les valeurs propres de A sont $-i, i$ et -1 , avec

$$E_i = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \end{pmatrix}, \quad E_{-i} = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}, \quad E_{-1} = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Alors $A = PDP^{-1}$ où $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -i & i \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

- A^n

Le calcul de P^{-1} donne $P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1+i & 2i & -1+i \\ 1-i & -2i & -1-i \end{pmatrix}$. Ainsi,

$$A^n = PD^n P^{-1}$$

Tout ce qui nous intéresse est la dernière ligne :

$$A^n = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 2(-1)^n - 2Re(i^n(1+i)) & 2Re(-2i i^n) & 2(-1)^n - 2Re(i^n(-1+i)) \end{pmatrix}$$

i.e.

$$A^{2n} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 1 - (-1)^n & 0 & 1 + (-1)^n \end{pmatrix}$$

$$A^{2n+1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ -1 - (-1)^{n+1} & 2(-1)^n & -1 - (-1)^{n+1} \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$u_{2n} = \frac{1}{2} ((1 - (-1)^n)u_2 + (1 + (-1)^n)u_0) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$u_{2n+1} = \frac{1}{2} ((-1 - (-1)^{n+1})u_2 + 2(-1)^n u_1 + (-1 - (-1)^{n+1})u_0) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

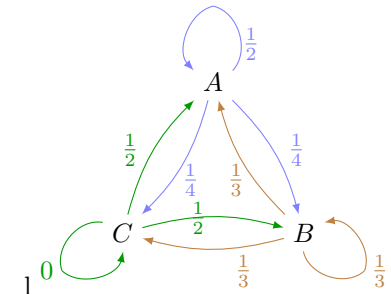
III-2 Sauts aléatoires par un exemple

On suppose qu'une puce se déplace aléatoirement sur les sommets d'un triangle ABC . À chaque saut, les probabilités sont les suivantes :

- Si la puce est sur A :
la probabilité de rester sur A est de $1/2$
la probabilité d'aller sur B est de $1/4$
la probabilité d'aller sur C est de $1/4$

- Si la puce est sur B :
la probabilité d'aller sur A est de $1/3$
la probabilité de rester sur B est de $1/3$
la probabilité d'aller sur C est de $1/3$

- Si la puce est sur C :
la probabilité d'aller sur A est de $1/2$
la probabilité d'aller sur B est de $1/2$
la probabilité de rester sur C est de 0



Si on note $a_n, (resp. b_n, c_n)$ les probabilités de se trouver sur le point A (resp. B, C) juste après avoir effectué le $n^{\text{ème}}$ saut, on souhaite calculer ces valeurs en fonction de a_0, b_0, c_0 .

Si on note M_n le point sur lequel on est juste après le $n^{\text{ème}}$ saut

$$\begin{cases} a_{n+1} = P_{M_n=A}(M_{n+1}=A)a_n + P_{M_n=B}(M_{n+1}=A)b_n + P_{M_n=C}(M_{n+1}=A)c_n \\ b_{n+1} = P_{M_n=A}(M_{n+1}=B)a_n + P_{M_n=B}(M_{n+1}=B)b_n + P_{M_n=C}(M_{n+1}=B)c_n \\ c_{n+1} = P_{M_n=A}(M_{n+1}=C)a_n + P_{M_n=B}(M_{n+1}=C)b_n + P_{M_n=C}(M_{n+1}=C)c_n \end{cases}$$

Ce qui peut s'exprimer sous forme matricielle

$$U_{n+1} = H_n U_n,$$

$$\text{où } U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} \text{ et } H_n = \begin{pmatrix} P_{M_n=A}(M_{n+1}=A) & P_{M_n=B}(M_{n+1}=A) & P_{M_n=C}(M_{n+1}=A) \\ P_{M_n=A}(M_{n+1}=B) & P_{M_n=B}(M_{n+1}=B) & P_{M_n=C}(M_{n+1}=B) \\ P_{M_n=A}(M_{n+1}=C) & P_{M_n=B}(M_{n+1}=C) & P_{M_n=C}(M_{n+1}=C) \end{pmatrix}$$

ce qui, avec les valeurs de l'énoncé ici, donne

$$H_n = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/2 \\ 1/4 & 1/3 & 1/2 \\ 1/4 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

H_n étant constante en fonction de n , on note $H = H_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et on obtient

$$U_n = H^n U_0$$

Il reste à calculer H^n en essayant de diagonaliser !

- Diagonalisation de H : (*exercice*)

les valeurs propres sont

$$1, -\frac{1}{12}(\sqrt{7}+1), \frac{1}{12}(\sqrt{7}-1)$$

et des vecteurs propres associés sont

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1+\sqrt{7} \\ -3-\sqrt{7} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1-\sqrt{7} \\ \sqrt{7}-3 \end{pmatrix}$$

Il y a trois valeurs propres pour une matrice d'ordre 3. Elle est diagonalisable, avec

$$H^n = P D^n P^{-1}$$

où

$$P = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 3 & 1+\sqrt{7} & 1-\sqrt{7} \\ 2 & -3-\sqrt{7} & \sqrt{7}-3 \end{pmatrix}$$

on a

$$P^{-1} = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 5 - \frac{11}{\sqrt{7}} & \frac{16}{\sqrt{7}} - 4 & -\frac{2}{\sqrt{7}} - 4 \\ 5 + \frac{11}{\sqrt{7}} & -\frac{16}{\sqrt{7}} - 4 & \frac{2}{\sqrt{7}} - 4 \end{pmatrix}$$

Alors

$$H^n = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 16 + 10\lambda_n + \frac{22}{\sqrt{7}}\mu_n & 16 - 8\lambda_n - \frac{32}{\sqrt{7}}\mu_n & 16 - 8\lambda_n + \frac{4}{\sqrt{7}}\mu_n \\ 12 - 6\lambda_n - \frac{24}{\sqrt{7}}\mu_n & 12 + 12\lambda_n + \frac{12}{\sqrt{7}}\mu_n & 12 - 6\lambda_n + \frac{30}{\sqrt{7}}\mu_n \\ 8 - 4\lambda_n + \frac{2}{\sqrt{7}}\mu_n & 8 - 4\lambda_n + \frac{20}{\sqrt{7}}\mu_n & 8 + 14\lambda_n - \frac{34}{\sqrt{7}}\mu_n \end{pmatrix}$$

$$\text{où } \lambda_n = \left(-\frac{1+\sqrt{7}}{12}\right)^n + \left(\frac{\sqrt{7}-1}{12}\right)^n \text{ et } \mu_n = \left(\frac{\sqrt{7}-1}{12}\right)^n - \left(-\frac{1+\sqrt{7}}{12}\right)^n$$

Conclusion :

Connaissant H^n , on peut déterminer les probabilités d'être sur n'importe quel point à l'instant n . Par exemple, si la puce part du point A , alors on a

$$U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On a

$$\begin{aligned} U_n = H^n U_0 &= \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 16 + 10\lambda_n + \frac{22}{\sqrt{7}}\mu_n & 16 - 8\lambda_n - \frac{32}{\sqrt{7}}\mu_n & 16 - 8\lambda_n + \frac{4}{\sqrt{7}}\mu_n \\ 12 - 6\lambda_n - \frac{24}{\sqrt{7}}\mu_n & 12 + 12\lambda_n + \frac{12}{\sqrt{7}}\mu_n & 12 - 6\lambda_n + \frac{30}{\sqrt{7}}\mu_n \\ 8 - 4\lambda_n + \frac{2}{\sqrt{7}}\mu_n & 8 - 4\lambda_n + \frac{20}{\sqrt{7}}\mu_n & 8 + 14\lambda_n - \frac{34}{\sqrt{7}}\mu_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 16 + 10\lambda_n + \frac{22}{\sqrt{7}}\mu_n \\ 12 - 6\lambda_n - \frac{24}{\sqrt{7}}\mu_n \\ 8 - 4\lambda_n + \frac{2}{\sqrt{7}}\mu_n \end{pmatrix} = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 8 + 5\lambda_n + \frac{11}{\sqrt{7}}\mu_n \\ 6 - 3\lambda_n - \frac{12}{\sqrt{7}}\mu_n \\ 4 - 2\lambda_n + \frac{1}{\sqrt{7}}\mu_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ou autrement dit, si la puce part de A , la probabilité après le $n^{\text{ème}}$ saut d'être

$$\begin{array}{l|l} \text{en } A & \left| \begin{array}{l} \frac{4}{9} + \frac{5}{18} \left(\left(-\frac{1+\sqrt{7}}{12}\right)^n + \left(\frac{\sqrt{7}-1}{12}\right)^n \right) + \frac{11}{18\sqrt{7}} \left(\left(\frac{\sqrt{7}-1}{12}\right)^n - \left(-\frac{1+\sqrt{7}}{12}\right)^n \right) \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{6} \left(\left(-\frac{1+\sqrt{7}}{12}\right)^n + \left(\frac{\sqrt{7}-1}{12}\right)^n \right) - \frac{2}{3\sqrt{7}} \left(\left(\frac{\sqrt{7}-1}{12}\right)^n - \left(-\frac{1+\sqrt{7}}{12}\right)^n \right) \\ \frac{2}{9} - \frac{1}{9} \left(\left(-\frac{1+\sqrt{7}}{12}\right)^n + \left(\frac{\sqrt{7}-1}{12}\right)^n \right) + \frac{1}{18\sqrt{7}} \left(\left(\frac{\sqrt{7}-1}{12}\right)^n - \left(-\frac{1+\sqrt{7}}{12}\right)^n \right) \end{array} \right. \\ \text{en } B & \\ \text{en } C & \end{array}$$